Uzupełnienie

Granica ciągu punktów na płaszczyźnie

Def. Ciąg (nieskończony) $P_n = (x_n, y_n)$ punktów na płaszczyźnie ma granicę w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$, jeśli istnieją granice (skończone) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

jest to równoważne definicji

Def. (2) Ciąg (nieskończony) (P_n) punktów na płaszczyźnie ma granicę w punkcie P_0, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie że wszystkie punkty P_n z indeksem $n > n_0$ należą do $O(P_0, \varepsilon)$ (koła otwartego o środku P_0 i promieniu ε).

Podobnie w przestrzeni.

Granica funkcji dwóch zmiennych

Definicja. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$, jeśli dla każdego ciągu $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, gdzie wszystkie $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$, ciąg liczbowy $f(x_n, y_n) \to g$.
(Rysunek.)

Uwaga: Def. także dla $g = \pm\infty$;
Funkcja może nie być określona w (x_0, y_0).

Przykłady

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x - 2y}{x^2 + y^2} = \frac{x_0 - 2y_0}{x_0^2 + y_0^2}$, o ile $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Dla $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mamy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$; w tym przypadku granica nie istnieje, bo dążąc do $(0, 0)$ po różnych drogach wychodzi różnie. (Sprawdzić).

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$,

tu też symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$, jednak wybierając różne drogi ciągle dostajemy ten sam wynik; próbujemy więc wykazać, że granica istnieje
tu stosujemy albo podstawienie $z = x^2 + y^2$ i stosujemy regułę de'lHospitala albo odpowiednio przekształcamy całe wyrażenie)

$$\frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{(1 + x^2 + y^2) - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{(\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{1 + x^2 + y^2} + 1)} =$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1} \quad \to \quad \frac{1}{2} \quad \text{przy} \quad (x,y) \to (0,0).$$

Podobnie dla funkcji trzech zmiennych.

Ciągłość funkcji dwóch zmiennych

DEF. Funkcja $f(x,y)$ określona w otoczeniu punktu (x_0,y_0) jest ciągła w tym punkcie, jeśli $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ (ma granicę w tym punkcie i jest ona równa wartości funkcji w tym punkcie)

PRZYKŁADY NIECIĄGŁOŚCI

Ciągłość funkcji elementarnych

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej dochodzimy do ogólnego wniosku, że *wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w dziedzinie określoności* (a więc obliczanie granic sprowadza się zasadniczo do podstawiania wartości).

Funkcje elementarne to funkcje, które można uzyskać przy pomocy działań arytmetycznych z funkcji podstawowych: stałych, tożsamościowej, trygonometrycznych, logarytmów i funkcji wykładniczych.

Podobnie dla funkcji 3 zmiennych.

Funkcje ciągłe i różniczkowalne.

Całki potrójne

Definicja całki potrójnej, główne twierdzenia i metody obliczania są analogiczne do całki podwójnej. Zwrócę szczególną uwagę na to co ulega zmianie.

Całkę potrójną definiujemy wstępnie na **prostopadłościanie** (zamiast na prostokącie). Dla danego prostopadłościanu R o bokach równoległych do osi Ox, Oy i Oz oraz funkcji **trzech** zmiennych $f(x, y, z)$, dzielimy ten prostopadłościan na n prostopadłościanów (które całkowicie wypełniają R i mają rozłączne wnętrza) o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$; w każdym z nich wybieramy punkt (x_k^*, y_k^*, z_k^*) (zwiemy je *punktami pośrednimi*), i obliczamy sumę $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$.

Całkę potrójną z funkcji $f(x, y, z)$ definiujemy jako granicę ciągu sum całkowych odpowiadających ciągowi podziałów $\mathcal{P}$ prostopadłościanu R, dla których maksymalna średnica $\delta(\mathcal{P})$ prostopadłościanu w podziale $\mathcal{P}$ dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów $\mathcal{P}$ prostopadłościanu R, ani od wyboru punktów pośrednich (x_k^*, y_k^*, z_k^*). Mówimy wtedy, że funkcja $f(x, y, z)$ jest *całkowalna* w prostopadłościanie R. (*Uwaga.* Zapis $dx\, dy\, dz$ zastępujemy czasami skrótem dV).

Własności całki potrójnej. Podobnie jak całka podwójna, całka potrójna jest operatorem liniowym i addytywnym, to znaczy zachodzą wzory:

$$\iiint\limits_R (af(x, y, z) + bg(x, y, z))\, dV = a\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV z + b\iiint\limits_R g(x, y, z)\, dV$$

oraz jeśli R_1 i R_2 są prostopadłościanami otrzymanymi z dowolnego podziału R na dwa prostopadłościany, to

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{R_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint\limits_{R_2} f(x, y, z)\, dV.$$

Najważniejsze twierdzenie dotyczą ponownie całkowalności funkcji ciągłych i prawie ciągłych, oraz sposobów obliczania całki podtrójnej.

TWIERDZENIE *Jeśli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła w każdym punkcie prostopadłościanu za wyjątkiem punktów, które tworzą zbiór o objętości zero, to $f(x, y, z)$ jest całkowalna w tym prostopadłościanie.*

TWIERDZENIE *Dla takiej funkcji, jeśli* $R = \{a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant y \leqslant d,\, r \leqslant x \leqslant s\}$

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_r^s f(x,y,z)\,dz.$$

Całki w powyższym wzorze nazywają się, podobnie jak dla całki podwójnej, *całkami iterowanymi* i stosujemy podobną konwencję zapisu w celu uniknięcia dużych nawiasów. Kolejność całek iterowanych (zmiennych) w powyższym twierdzeniu może być oczywiście dowolna.

Całka potrójna po dowolnym obszarze. Podobnie jak w przypadku całki podwójnej, całka potrójna po prostopadłościanie jest tylko krokiem do zdefiniowania całki potrójnej po dowolnym obszarze ograniczonym U w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W tym celu przedłużamy funkcję $f(x,y,z)$ określoną na obszarze $U \subset \mathbb{R}^3$ na zawierający ten obszar prostopadłościan $R \supseteq U$, w ten sposób, że w punktach poza U funkcja przyjmuje wartość 0. Definiujemy więc

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_R f^*(x,y,z)\,dV,$$

gdzie $f^*(x,y,z) = f(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in U$ oraz $f^*(x,y,z) = 0$ w przeciwnym razie, a R jest dowolnym prostopadłościanem zawierającym U. Definicja jest poprawna, o ile całka po prawej stronie istnieje. Wtedy mówimy, że $f(x,y,z)$ jest *całkowalna w obszarze* U. Można wykazać, że definicja ta nie zależy od wyboru prostopadłościanu $R \supseteq U$.

Całka taka zachowuje własności całki po prostopadłościanie: jest operatorem liniowym i jest addytywna względem dowolnych podziałów obszaru U: jeśli $U = U_1 \cup U_2$, i U_1, U_2 mają rozłączne wnętrza, to całka po U jest sumą całek po U_1 i U_2.

Najważniejsze jest twierdzenie pozwalające na obliczanie całek potrójnych po *obszarze normalnym* przy pomocy całek iterowanych. Obszar postaci $U = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, h_1(x) \leqslant y \leqslant h_2(x), g_1(x,y) \leqslant y \leqslant g_2(x,y)\}$, gdzie funkcje $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ oraz $g_1(x,y) \leqslant g_2(x,y)$ są ciągłe w odpowiednich dziedzinach, nazywamy *obszarem normalnym*. Dla takich obszarów mamy

TWIERDZENIE *Jeśli* U *jest obszarem normalnym zdefiniowanym powyżej, to*

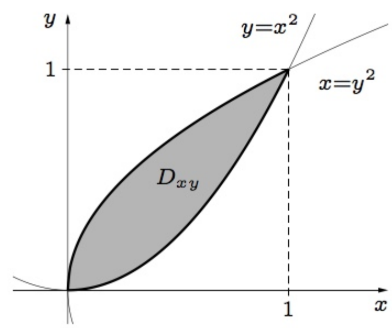
$$\iiint\limits_U f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Twierdzenie to zachodzi dla obszarów normalnych zdefiniowanych analogicznie przy zastosowaniu dowolnej kolejności zmiennych.

Obszar regularny. Tak jak w przypadku całki podwójnej obszar regularny to taki, który da się przedstawić jako suma obszarów normalnych o rozłącznych wnętrzach. Wówczas całka potrójna po takim obszarze regularnym jest sumą całek po składowych obszarach normalnych.

Przykład. Obliczmy całkę potrójną $\iiint\limits_U xyz\,dx\,dy\,dz$ po obszarze $U:\ y \geqslant x^2,\ x \geqslant y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant xy$;

Żeby wyobrazić sobie obszar (bryłę) po której całkujemy, zauważmy najpierw, że dwa pierwsze warunki w opisie U nie zawierają zmiennej z. Oznacza to, że wyznaczają one obszar D_{xy} na płaszczyźnie Oxy. (Dla warunków z zadania przedstawiony on jest na rysunku poniżej.)



W przestrzeni warunki te wyznaczają obszar złożony z prostych prostopadłych do płaszczyzny Oxy przechodzących przez obszar D_{xy}. Trzeci warunek odcina z tego obszaru kawałek ograniczony od dołu płaszczyzną $z = 0$ i od góry powierzchnią $z = xy$ (czasami taką bryłę nazywa się *walcem krzywoliniowym* o podstawie D_{xy}). Podstawa D_{xy} jest w tym przypadku obszarem normalnym, który można opisać warunkami $0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$. Po dopisaniu trzeciego warunku otrzymujemy opis obszaru normalnego w przestrzeni. W związku z tym

$$\iiint\limits_U xyz\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{xy} xyz\,dz =$$

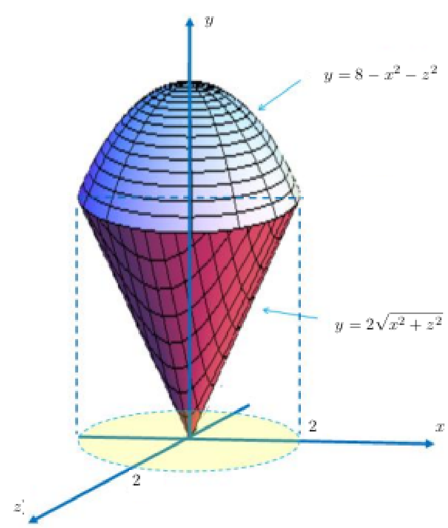
i obliczając dalej

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=xy} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^3 \left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (x^5 - x^{11})\,dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^12}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{96}.$$

Jak widać zasadniczą częścią rozwiązania jest opisanie obszaru całkowania jako obszaru normalnego i zapisanie całki potrójnej w postaci całki iterowanej. Generalnie, jeśli mamy warunki bez zmiennej z wyznaczające obszar ograniczony D_{xy} na płaszczyźnie Oxy, to obszar normalny opisujemy w podobny sposób. (Rolę wyróżnionej zmiennej z może oczywiście pełnić inna zmienna, a kolejność zmiennych może być dowolna, w zależności od obszaru). Poniżej podajemy przykład nieco innej sytuacji.

Przykład 2. Zapisać całkę potrójną $\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ po obszarze U ograniczonym krzywymi $y = 2\sqrt{x^2+z^2}$, $y = 8 - x^2 - z^2$ jako całkę iterowaną.

Tutaj mamy dwie przecinające się powierzchnie i wyznaczenie opisu ograniczonego przez nie obszaru jako obszaru normalnego lub regularnego może być trudniejsze. (W tym przypadku pomocne jest zauważenie, że dwie przecinające się powierzchnie to stożek i paraboloida, z osią Oy jako osią symetrii; dzięki temu możemy sobie wyobrazić kształt bryły w przestrzeni; zob. rysunek).



Wracamy do równań obu powierzchni. Rugując z nich zmienną y, widzimy, że współrzędne x i z punktów przecięcia powierzchni spełniają równanie:

$$2\sqrt{x^2+z^2} = 8 - x^2 - z^2.$$

Próba uproszczenia tego równania prowadzi do równania 4 stopnia dwóch zmiennych, z którego niewiele wynika. Rzeczywiste uproszczenie daje podstawienie $t = \sqrt{x^2+z^2}$. Otrzymujemy wówczas

$$2t = 8 - t^2 \quad \text{czyli} \quad t^2 + 2t - 8 = 0.$$

Stąd $t = 2$ lub $t = -4$, ale ponieważ $t \geqslant 0$, jedyną możliwością jest $t = 2$. A zatem całe równanie sprowadza się do równania $\sqrt{x^2+z^2} = 2$ czyli

$x^2 + z^2 = 4$.

Wynika stąd, że rzut prostopadły na płaszczyznę Oxz przecięcia się obu powierzchni jest okręgiem o środku $(0, 0)$ i promieniu 2 (jak na rysunku). Wobec tego nietrudno już opisać cały obszar:

$$-2 \leqslant x \leqslant 2, \quad -\sqrt{4 - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{4 - x^2}, \quad 2\sqrt{x^2 + z^2} \leqslant y \leqslant 8 - x^2 - z^2$$

(pierwsze dwa warunki opisują obszar na płaszczyźnie Oxz ograniczony okręgiem $x^2 + z^2 = 4$). Zatem

$$\iiint\limits_U xyz\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dz \int\limits_{2\sqrt{x^2+z^2}}^{8-x^2-z^2} f(x, y, z)\, dy.$$

Zastosowania całek potrójnych. Do obliczania objętości brył (obszarów w przestrzeni) i różnych wielkości fizycznych z niejednorodnym rozkładem w przestrzeni (w szczególności, masy i momentów, ładunków po obszarach przestrzennych).

Współrzędne walcowe i sferyczne. W przypadku całki potrójnej mamy dwa klasyczne sposoby zamiany zmiennych ułatwiające znacznie, w niektórych przypadkach, obliczenia: współrzędne walcowe (odpowiednik biegunowych na płaszczyźnie) i współrzędne sferyczne.

Wykład 14 (9 czerwca)

Zmiana zmiennych w całce potrójnej: współrzędne walcowe i sferyczne.

Podobnie jak w przypadku całki podwójnej istnieje możliwość łatwiejszego obliczania całki potrójnej przez odpowiednie podstawienie. W tym przypadku mamy trzy zmienne, więc ogólne podstawienie ma postać:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

Jeśli U oraz Ω są regularnymi obszarami w przestrzeni takimi, że przekształcenie $\varphi : \Omega \to U : (u, v, w) \to (\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w))$ jest ciągłe i wzajemnie jednoznaczne, to zachodzi wzór

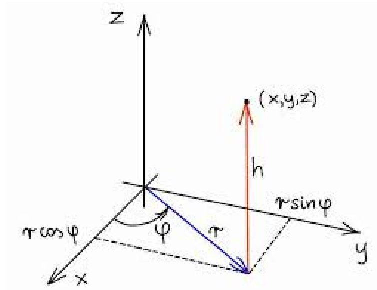
$$\iiint\limits_{U} f(x, y)\, dx\, dy = \iiint\limits_{\Omega} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w).\chi(u, v, w))\, |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw,$$

gdzie $J(u, v, w)$ jest *jakobianem* odwzorowania φ określonym wzorem $J(u, v, w) = \det \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix}$

Współrzędne walcowe. Przykładem takiego przekształcenia jest $(r, \varphi, h) \to (x, y, z)$ dane wzorami

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

Wzory te uogólniają na przestrzeń współrzędne biegunowe i noszą nazwę *współrzędnych walcowych*. Współrzędne r i φ interpretuje się na płaszczyźnie Oxy jako długość promienia wodzącego punktu (x, y) oraz kąt między promieniem i osią Ox, natomiast h oznacza wysokość punktu (x, y, x) nad płaszczyzną Oxy (jak na rysunku poniżej).



Przy tej interpretacji zamiast wyobrażania sobie obszaru Ω we współrzędnych kartezjańskich (r, φ, h) rozważamy raczej *opis obszaru* U we współrzędnych walcowych. Większość obszarów gdzie występują koła zwykle jest znacznie łatwiej opisać we współrzędnych walcowych niż kartezjańskich.

Nietrudno policzyć, że jakobian przekształcenia odpowiadającego współrzędnym walcowym wynosi $J(r, \varphi, h) = r$. Wzór na zmianę współrzędnych w całce potrójnej na współrzędne walcowe przybiera więc postać

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, r\, dr\, d\varphi\, dh.$$

Przykład. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całkę $\iiint\limits_U x^2\, dx\, dy\, dz$, gdzie U ograniczony jest powierzchniami $z = 9 - x^2 - y^2$ oraz $z = 0$.

Mamy tu do czynienia z odwróconą paraboloidą odciętą płaszczyzną $z = 0$. Obie powierzchnie przecinają się na okręgu $x^2+y^2 = 9$ czyli $r = 3$. Równanie paraboloidy we współrzędnych walcowych to $h = 9 - r^2$. Więc opis obszaru we współrzędnych walcowych to $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 3$ oraz $0 \leqslant h \leqslant 9 - r^2$.

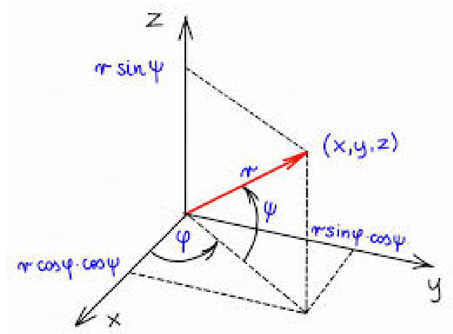
Wyjściowa całkę możemy więc zapisać jako całkę iterowaną

$$\iiint_U x^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr \int_0^{9-r^2} r^3\cos^2\varphi\, dh = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^2\varphi \int_0^3 r^3 \Big[h\Big]_0^{9-r^2} dr =$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^3 (9r^3 - r^5)\, dr = \frac{1}{2}\Big[(x + \sin\varphi\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} \left[\frac{9}{4}r^4 - \frac{r^6}{6}\right]_0^3 = \frac{243}{4}\pi.$$

Współrzędne sferyczne. Inna często stosowana zmiana zmiennych w całce potrójne związana jest z przekształceniem $(\varphi, \psi, r) \to (x, y, z)$ danym wzorami

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

Wzory te noszą nazwę *współrzędnych sferycznych*. W tym przypadku r jest długością promienia wodzącego punktu (x, y, z), a kąty φ i ψ mierzone są odpowiednio od osi Ox i płaszczyzny Oxy jak na rysunku poniżej.



Jakobian tego przekształcenia wynosi $J(r, \varphi, h) = r^2 \cos\psi$, a wzór na zmianę współrzędnych w całce potrójnej na współrzędne sferyczne przybiera zatem postać

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_U f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)\, r^2\cos\psi\, d\varphi\, d\psi\, dr.$$

Uwaga. Powyższe współrzędne noszą dokładniejszą nazwę *współrzędnych sferycznych geograficznych*, ponieważ istnieje inna wersja współrzędnych sferycznych (zwanych *matematycznymi* lub *astronomicznymi*), które mają inny jakobian i inny wzór na zmianę współrzędnych. Ponieważ stosowane są one w niektórych podręcznikach i można je znaleźć w internecie, trzeba uważać, żeby jednych nie pomylić z drugimi i nie pomieszać wzorów w trakcie ich stosowania.

Przykład. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całkę $\iint\limits_U \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, gdzie U dany jest nierównościami $3 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5$ oraz $z \leqslant 0$.

Obszar całkowania jest dolną półkulą o promieniu $\sqrt{5}$ z wydrążoną półkulą o promieniu $\sqrt{3}$ (coś na kształt wydrążonej połówki melona). Równania sferyczne tego obszaru to $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0$ oraz $\sqrt{3} \leqslant r \leqslant \sqrt{5}$.

Wyjściową całkę możemy więc zapisać jako całkę iterowaną

$$\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_U \sqrt{(r\cos\varphi\cos\psi)^2 + (r\sin\varphi\cos\psi)^2}\, r^2\cos\psi\, d\varphi\, d\psi\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\psi \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} r^3\cos^2\psi\, dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\psi\, d\psi \cdot \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} r^3\, dr = \ldots = 2\pi^2$$

W obliczeniach korzystamy z faktu, że zmienne dają się rozdzielić i całka iterowana jest po prostu iloczynem trzech całek pojedynczych.

Wykład 15 (16 czerwca)

Przykłady zastosowań całek podwójnych i potrójnych w geometrii i fizyce.

Objętość obszaru regularnego U można obliczyć ze wzoru

$$\text{Objetość}(U) = \iiint\limits_U dx\,dy\,dz.$$

Samo obliczenie jest w zasadzie identyczne jak w przypadku wzoru na objętość wykorzystującego całkę podwójną, za jednym wyjątkiem: jeśli użyjemy zmiany zmiennych poprzez wprowadzenie współrzędnych sferycznych obliczenie może się znacznie uprościć.

Przykład. Objętość kuli K o promieniu R wynosi

$$V = \iiint\limits_U dx\,dy\,dz = \iiint\limits_U r^2 \cos\psi\, d\varphi\, d\psi\, dr,$$

gdzie K we współrzędnych sferycznych ma opis $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Mamy więc

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R r^2 \cos\psi\, dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \cdot \int\limits_0^R r^2\, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

Jeśli chodzi o zastosowania całek podwójnych i potrójnych w fizyce wszystkie niezbędne informacje można znaleźć w podręczniku Gewert-Skoczylas `http://www.gis.wroc.pl/pdf/am2d_19_korona.pdf` na stronach 106 i 124.